●۲۰- اتومبیلی که با تندی $۸۰/۰\,\text{km/h}$ حرکت می‌کند دارای چرخهایی به قطر $۷۵/۰\,\text{cm}$ است. (الف) تندی زاویه‌ای چرخها نسبت به محورشان چقدر است؟ (ب) اگر این اتومبیل به‌طور یکنواخت با طی ۳۰/۰ دور کامل چرخ‌ها متوقف شود (بدون لغزش)، بزرگی شتاب زاویه‌ای چرخ‌ها چقدر است؟ (پ) اتومبیل در مدت ترمز گرفتن چقدر حرکت خواهد کرد؟

حل: (الف)

$$v = ۸۰\,\text{km/h} = ۲۲/۲\,\text{m/s}$$

$$\omega_۰ = \frac{v}{r} = \frac{۲۲/۲}{۰/۳۷۵} = ۵۹/۳\ \text{rad/s}$$

(ب)

$$\omega^۲ - \omega_۰^۲ = ۲\alpha\,\Delta\theta$$

$$\alpha = -\frac{\omega_۰^۲}{۲\Delta\theta} = -\frac{(۵۹/۳)^۲}{۲(۳۰)(۲\pi)}$$

$$\alpha = -۹/۳۱\,\text{rad/s}^۲$$

(پ)

$$a = R\alpha = ۰/۳۷۵(-۹/۳۱) = -۳/۵\,\text{m/s}^۲$$

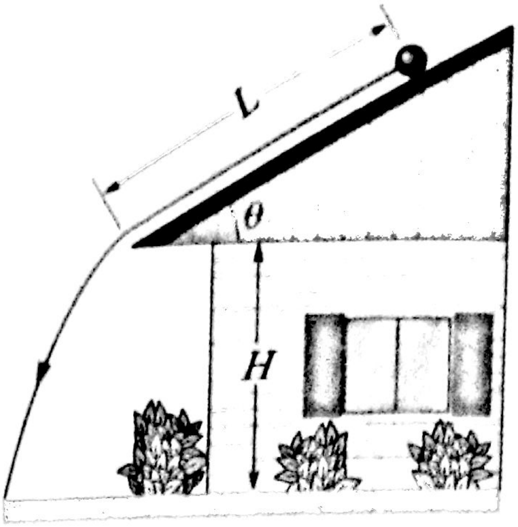
$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ax$$

$$x = -\frac{(۲۲/۲)^۲}{۲(-۳/۵)} = ۷۰/۷\,\text{m}$$

Scanned by CamScanner

●●۷- ILW در شکل ۱۱-۳۱ استوانهٔ توپری به شعاع ۱۰cm و جرم ۱۲kg از حال سکون و بدون لغزش از سقفی که شیب آن $\theta = ۳۰°$ است به پایین می‌غلتد و مسافت $L = ۶m$ را می‌پیماید. (الف) تندی زاویه‌ای استوانه حول مرکزش وقتی سقف را ترک می‌کند چقدر است؟ (ب) لبهٔ سقف در ارتفاع $H = ۵/۰m$ قرار دارد. در چه فاصلهٔ افقی از لبهٔ سقف این استوانه با سطح زمین برخورد می‌کند؟

Scanned by CamScanner



شکل ۱۱-۳۱ مسئلهٔ ۷

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow mgh = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ + \frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$I = \frac{۱}{۲}mR^۲ \qquad v = R\omega$$

$$mgh = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}mR^۲\omega^۲) + \frac{۱}{۲}mR^۲\omega^۲$$

$$h = L\sin\theta$$

$$gL\sin\theta = \frac{۳}{۴}R^۲\omega^۲ \Rightarrow \omega^۲ = \frac{۴}{۳}\frac{gL\sin\theta}{R^۲}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{۴\times ۹/۸\times ۶\times ۰/۵}{۳\times(۰/۱)^۲}} = ۶۳ \text{ rad/s}$$

(ب) سرعت خطی برابر است با:

$$v = R\omega \Rightarrow v = ۶/۲۶\text{m/s}$$

از فرمول مسیر حرکت برای یافتن فاصلهٔ افقی x استفاده می‌کنیم.

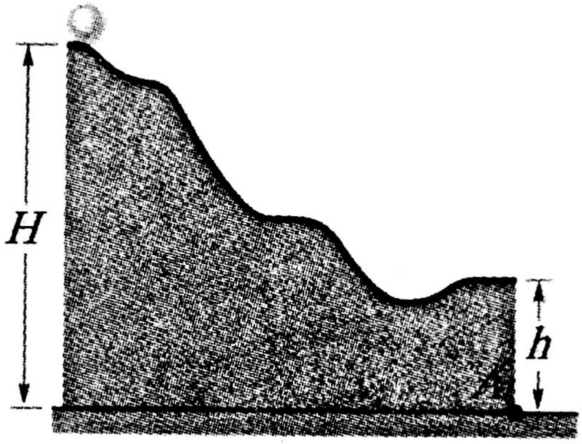
$$H = x\tan\theta - \frac{gx^۲}{۲v_۰^۲\cos^۲\theta} \qquad \theta = -۳۰°$$

$$-۵ = x(\tan -۳۰°) - \frac{۹/۸x^۲}{۲\times(۶/۲۶)^۲\cos^۲(-۳۰)}$$

از حل معادلهٔ درجه دوم بالا، جواب $x = ۴/۰\text{m}$ به‌دست می‌آید.

Scanned by CamScanner

۹●●- در شکل ۱۱-۳۳ یک گلولهٔ توپر به‌طور هموار از حال سکون شروع به غلتش می‌کند (ارتفاع اولیه $H = ۶/۰\text{m}$ است) و در انتهای این مسیر که افقی است و در ارتفاع $h = ۲/۰\text{m}$ قرار دارد، از مسیر جدا می‌شود. فاصله افقی نقطهٔ برخورد گلوله با زمین تا نقطهٔ A چقدر است؟



شکل ۱۱-۳۳ مسئلهٔ ۹

حل: ابتدا سرعت خطی گلوله را با استفاده از پایستگی انرژی می‌یابیم:

$$E_۱ = E_۲$$

Scanned by CamScanner

$$mgH = mgh + \frac{۱}{۲}I\omega^۲ + \frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \text{و} \quad I = \frac{۲}{۵}mR^۲$$

$$mg(H-h) = \frac{۷}{۱۰}mv^۲ \Rightarrow v^۲ = \frac{۱۰}{۷}g(H-h)$$

$$v = \sqrt{\frac{۱۰}{۷}۹/۸(۴)} = ۷/۴۸\text{m/s}$$

دوباره از معادلهٔ مسیر حرکت استفاده می‌کنیم تا x را بدست آوریم

$$\theta = ۰$$

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^۲}{۲v_۰^۲\cos^۲\theta}$$

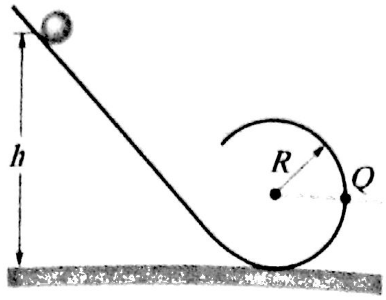
$$۲ = \frac{۹/۸(x)^۲}{۲(۷/۴۸)^۲} \Rightarrow x = ۴/۸\text{m}$$

Scanned by CamScanner

۱۲۰۰●● - GO در شکل ۱۱-۳۵ گلولهٔ برنجی توپری به جرم ۰/۲۸۰g از حال سکون در طول یک مسیر مستقیم رها می‌شود و به‌طور هموار در یک مسیر مارپیچ مانند می‌غلتد. شعاع این مارپیچ دایره‌ای برابر $R = ۱۴/۰ \text{cm}$ و شعاع گلوله $r \ll R$ است. (الف) در صورتی که گلوله به لبهٔ بالایی مسیر دایره‌ای برسد و سپس از آن جدا شود مقدار h را به دست آورید. اگر گلوله از

Scanned by CamScanner

ارتفاع $h=۶/۰۰R$ رها شود، مطلوب است محاسبهٔ (ب) بزرگی و (پ) جهت مؤلفهٔ نیروی افقی وارد بر گلوله در نقطهٔ Q.



شکل ۱۱-۳۵ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) برای گلوله، در بالاترین نقطهٔ مسیر دایره‌ای می‌توان نوشت:

$$N+mg=\frac{mv^۲}{R}$$

برای اینکه گلوله از مسیر جدا شود، باید داشته باشیم $N=۰$

پس:

$$mg=\frac{mv^۲}{R}\Rightarrow v^۲=Rg$$

این رابطه را، در پایستگی انرژی جایگذاری می‌کنیم.

$$E_۱=E_۲\Rightarrow mgh=\frac{۱}{۲}I\omega^۲+\frac{۱}{۲}mv^۲+mg۲R$$

$$mgh=\frac{۱}{۲}I\omega^۲+\frac{۱}{۲}mgR+۲mgR\Rightarrow I=\frac{۲}{۵}mr^۲$$

$$gh=\frac{۱}{۵}r^۲\omega^۲+\frac{۵}{۲}gR$$

از طرفی داریم $v=r\omega$

$$gh=\frac{۱}{۵}Rg+\frac{۵}{۲}Rg\Rightarrow h=۲/۷R$$

$$h=۳۷/۸\text{cm}$$

(ب) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. $E_۱=E_۲$

$$mgh=mgR+\frac{۱}{۲}I\omega^۲+\frac{۱}{۲}mv^۲$$

با جایگذاری بدست می‌آوریم: $I=\frac{۲}{۵}mr^۲$

$$۵mgR=\frac{۷}{۱۰}mv^۲\Rightarrow\frac{mv^۲}{R}=\frac{۵۰}{۷}mg$$

از شکل پیداست نیروی افقی همان $m\frac{v^۲}{R}$ است.

$$N=\frac{mv^۲}{R}=\frac{۵۰\times۰/۲۸\times۱۰^{-۳}}{۷}\times۹/۸=۱/۹۶\times۱۰^{-۲}\ \text{N}$$

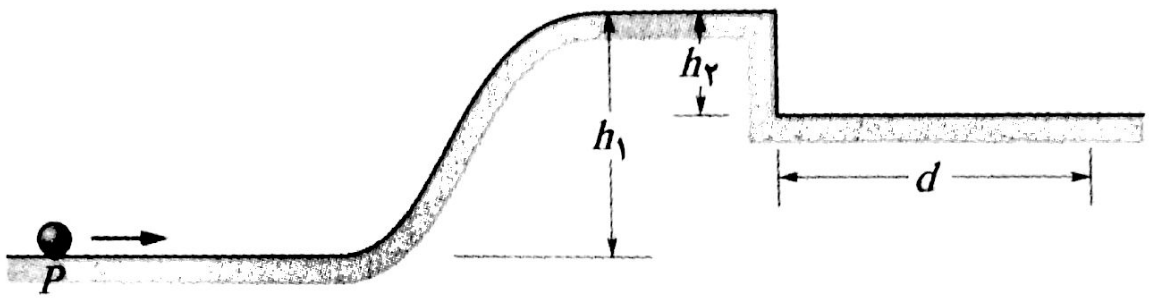
(پ) جهت این نیرو رو به مرکز دایره است.

Scanned by CamScanner

●●●۱۴- در شکل ۱۱-۳۷ گلولهٔ کوچک توپر و یکنواختی را از نقطهٔ P پرتاب کرده‌ایم، به‌طوری که گلوله در مسیری افقی به‌طور هموار می‌غلتد و از یک سطح شیبدار بالا می‌رود و به یک سطح افقی دیگر می‌رسد. سپس این سطح را به‌طور افقی ترک می‌کند و روی یک تخته، در فاصلهٔ افقی d از لبهٔ سمت راست سطح فرود می‌آید. ارتفاع‌های قائم عبارت‌اند از $h_1 = ۵/۰۰\ \text{cm}$ و $h_2 = ۱/۶۰\ \text{cm}$. تندی اولیهٔ گلوله باید چقدر

Scanned by CamScanner

باشد تا وقتی گلوله را از نقطهٔ P پرتاب می‌کنیم در فاصلهٔ $d=۶/۰۰\,cm$ فرود آید؟



شکل ۱۱-۳۷ مسئلهٔ ۱۴

حل: ابتدا، سرعت گلوله هنگام رها شدن از ارتفاع $h_۲$ را بدست می‌آوریم. سپس از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

$$\theta=۰ \qquad\qquad y=-h_۲$$

$$y=+x\tan\theta-\frac{gx^۲}{۲v^۲\cos^۲\theta}$$

$$v^۲=\frac{g\,x^۲}{۲h_۲}=\frac{۹/۸(۰/۰۶)^۲}{۲(۰/۰۱۶)}=۱/۱$$

در محاسبات $I=\frac{۲}{۵}mR^۲$ را لحاظ می‌کنیم.

$$E_i=E_f$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_i^۲+\frac{۱}{۲}I\omega_i^۲+mgh_۱=mgh_۲+\frac{۱}{۲}mv_f^۲+\frac{۱}{۲}I\omega_f^۲$$

$$\frac{۱}{۲}mv_i^۲+\frac{۱}{۲}mv_i^۲+mgh_۱=mgh_۲+\frac{۱}{۲}mv_f^۲+\frac{۱}{۵}mv_f^۲$$

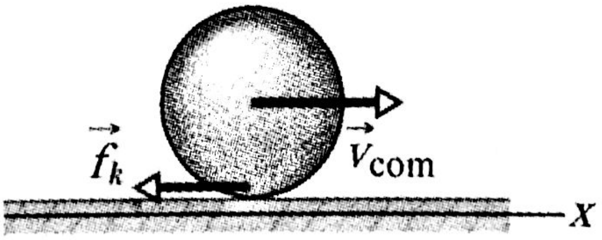
$$\frac{۷}{۱۰}v_i^۲+gh_۱=\frac{۷}{۱۰}v_f^۲+gh_۲$$

$$v_i^۲=v_f^۲+\frac{۱۰}{۷}g(h_۲-h_۱)$$

$$v_i=۱/۳۴\,\text{m/s}$$

Scanned by CamScanner

●●●۱۵- GO [redacted] توپ بولینگی به شعاع $R = 11\text{cm}$ در امتـداد مسیری پرتاب می‌شود. توپ (شکل ۱۱–۳۸) روی مسیر بـا تنـدی اولیهٔ $v_{com,0} = 8/5\text{m/s}$ و تندی زاویه‌ای اولیهٔ $\omega_0 = 0$ مـی‌لغـزد. ضریب اصطکـاک جنبشی میـان توپ و سطح برابر ۰/۲۱ اسـت. نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$ که بر توپ وارد می‌شود یک شـتاب خطی به توپ می‌دهد و گشتاور نیرویی ایجاد می‌کنـد کـه باعـث ایجاد شتاب زاویه‌ای در توپ می‌شود. وقتی تنـدی v_{com} بـه حـد کافی کاهش و تندی زاویه‌ای ω به حد کافی افزایش یابد، لغـزش توپ متوقف می‌شود و سپس توپ به‌طور هموار می‌غلتـد. (الـف) v_{com} را برحسب ω به دست آوریـد. در حـین لغـزش مطلـوب است (ب) شتاب خطی و (پ) شتاب زاویه‌ای. (ت) تـوپ بـرای چه مدتی می‌لغزد؟ (ث) توپ چه مسـافتی مـی‌لغـزد؟ (ج) تنـدی خطی توپ وقتی غلتش هموار توپ آغاز شود چقدر است؟



شکل ۱۱–۳۸ مسئلهٔ ۱۵

Scanned by CamScanner

حل: **(الف)** نیروی اصطکاک، سبب کاهش سرعت می‌شود.

$$ma_c = -f_k \Rightarrow ma_c = -\mu_k mg \Rightarrow a_c = -\mu_k g$$

$v_۰$ همان سرعت اولیه است.

$$v_c = -\mu_k gt + v_۰ \qquad (۱)$$

از طرفی، نیروی اصطکاک سبب ایجاد گشتاور نیرو می‌شود.

$$I\alpha = f_k R \Rightarrow \alpha = f_k \frac{R}{I} \quad \text{و} \quad I = \frac{۲}{۵} mR^۲$$

$$\alpha = \frac{\mu_k mg}{\frac{۲}{۵} mR^۲} R \Rightarrow \alpha = \frac{۵}{۲} \mu_k \frac{g}{R}$$

$$\omega = \alpha t \Rightarrow \omega = \frac{۵}{۲} \mu_k \frac{g}{R} t \qquad (۲)$$

زمان را بین روابط ۱ و ۲ حذف می‌کنیم.

$$t = \frac{v_۰ - v}{\mu_k g} \Rightarrow \omega = \frac{۵}{۲} \mu_k \frac{g}{R} \left(\frac{v_۰ - v}{\mu_k g} \right)$$

$$\Rightarrow v_c = -\frac{۲}{۵} R\omega + v_۰$$

(ب) همان طور که گفته شد، شتاب خطی برابر با $-\mu_k g$ است.

$$a_c = -۰/۲۱ \times ۹/۸ = -۲/۱ \text{m/s}^۲$$

(پ) $\alpha = \frac{t}{I} = -\frac{۵}{۲} \mu_k \frac{g}{R} = -۲/۵ \times ۰/۲۱ \times \frac{۹/۸}{۰/۱۱} = -۴۷ \text{rad/s}^۲$

(ت) توپ تا زمانی می‌لغزد که بین سرعت زاویه‌ای و خطی آن رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$v = R\omega$$

با جایگذاری بدست می‌آوریم:

$$R\omega = -\frac{۲}{۵} R\omega + v_۰ \Rightarrow \frac{۷}{۵} R\omega = v_۰$$

$$\Rightarrow v = \frac{۵}{۷} v_۰$$

یعنی زمانی که سرعت توپ به $\frac{۵}{۷}$ سرعت اولیهٔ آن برسد غلتش آن آغاز می‌شود.

$$\frac{۵}{۷} v_۰ = -\mu_k gt + v_۰ \Rightarrow \frac{۲}{۷} v_۰ = \mu_k gt$$

$$t = \frac{\frac{۲}{۷} \times ۸/۵}{۰/۲۱ \times ۹/۸} = ۱/۲\text{s}$$

(ث) $x = -\frac{۱}{۲} at^۲ + v_۰ t$

$$x = -\frac{۱}{۲} ۰/۲۱ \times ۹/۸ \times (۱/۲)^۲ + ۸/۵ \times ۱/۲ = ۸/۶\text{m}$$

(ج) همان‌طور که گفته شد، تندی خطی توپ $\frac{۵}{۷} v_۰$ است. یعنی

$$v = \frac{۵}{۷} \times ۸/۵ = ۶/۱ \text{m/s}$$

Scanned by CamScanner

●●۲۲۰۰- به ذره‌ای که در دستگاه مختصات xyz حرکت می‌کند نیرو وارد می‌شود. وقتی ذره دارای بردار مکان $\vec{r} = (2/00\text{m})\hat{i} - (3/00\text{m})\hat{j} + (2/00\text{m})\hat{k}$ است نیرو برابر است با $\vec{F} = F_x\hat{i} + (7/00\text{N})\hat{j} - (6/00\text{N})\hat{k}$ و گشتاور نیروی مربوط نسبت به مبدأ برابر است با $\vec{\tau} = (4/00\text{N}\cdot\text{m})\hat{i} + (2/00\text{N}\cdot\text{m})\hat{j} - (1/00\text{N}\cdot\text{m})\hat{k}$. مقدار F_x را تعیین کنید.

حل:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ F_x & 7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= [4\hat{i} + (2F_x + 12)\hat{j} + (14 + 3F_x)\hat{k}]\text{N}\cdot\text{m}$$

Scanned by CamScanner

این گشتاور، طبق صورت مسئله برابر است با $(۴\hat{i}+۲\hat{j}-۱\hat{k})N\cdot m$. پس مؤلفه‌های j دو بردار را برابر قرار می‌دهیم.

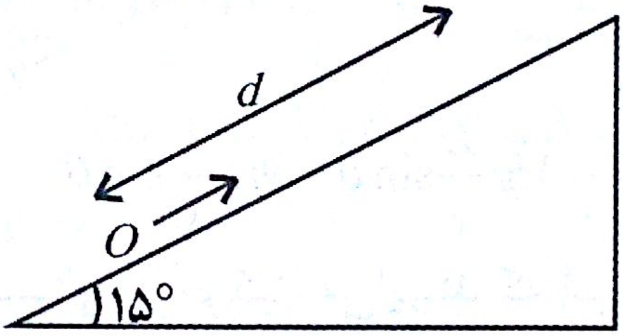
$$۲F_x+۱۲=۲\Rightarrow$$

$$۲F_x=-۱۰\Rightarrow F_x=-۵N$$

Scanned by CamScanner

۷۰- توپ یکنواخت صلبی به‌طور هموار روی زمین می‌غلتد و سپس از سطح شیبداری به زاویهٔ $۱۵/۰^\circ$ بالا می‌رود. وقتی به اندازهٔ ۱/۵۰m روی سطح شیبدار بغلتد به‌طور لحظه‌ای متوقف می‌شود. تندی اولیه توپ را به دست آورید.

حل: از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.



$$E_i = E_f$$

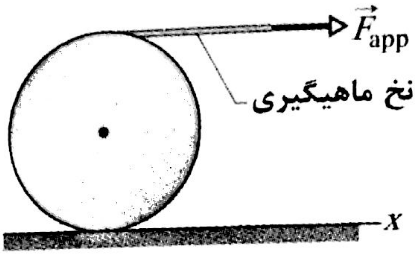
$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}I\omega^۲ = mgh \qquad h = d\sin\theta$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}\frac{۲}{۵}mR^۲\omega^۲ = mgh \Rightarrow \frac{۷}{۱۰}v^۲ = gh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۱۰}{۷}gh}$$

$$v = \sqrt{\frac{۱۰}{۷}۹/۸\times۱/۵\sin(۱۵^\circ)} = ۲/۳۳\ \text{m/s}$$

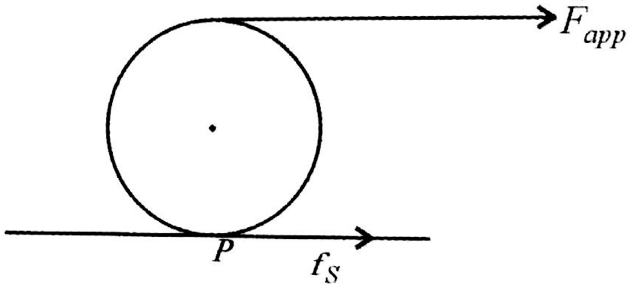
Scanned by CamScanner

۷۱- SSM در شکل ۱۱-۶۰ نیروی افقی ثابت $\vec{F}_{app}$ به بزرگی ۱۲N را به استوانهٔ توپر یکنواختی توسط یک نخ ماهیگیری که به دور استوانه پیچیده شده است وارد می‌کنیم. جرم استوانه ۱۰kg و شعاع آن ۰/۱۰ m است و استوانه به‌طور هموار روی سطحی افقی می‌غلتد. (الف) بزرگی شتاب مرکز جرم استوانه چقدر است؟ (ب) بزرگی شتاب زاویه‌ای استوانه نسبت به مرکز جرم آن چقدر است؟ (ج) نیروی اصطکاک وارد بر استوانه برحسب نماد بردار یکه چیست؟



شکل ۱۱-۶۰ مسئلهٔ ۹۵

حل: (الف)



$$\tau = I\alpha$$

$$I = \frac{۱}{۲}mR^{۲} + mR^{۲} = ۱/۵\,mR^{۲}$$

$$\tau = (F_{app}) \times ۲R \Rightarrow ۱/۵\,mR^{۲}\alpha = ۲RF_{app}$$

$$\alpha = \frac{۲F_{app}}{۱/۵\,mR} = \frac{۲\times۱۲}{۱/۵\times۱۰\times۰/۱} = ۱۶\ \text{rad/s}^{۲}$$

از آنجا شتاب مرکز جرم برابر است با:

$$a = R\alpha = ۰/۱\times۱۶ = ۱/۶\ \text{m/s}$$

(ب) همان گونه که ملاحظه شد، این شتاب $۱۶\ \text{rad/s}^{۲}$ است.

(پ) قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم.

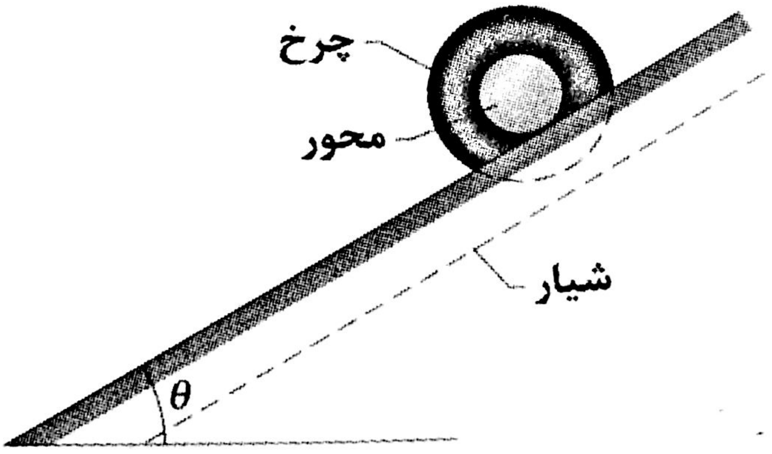
$$F_{app} + f_s = ma$$

$$f_s = -F_{app} + ma = -۱۲ + ۱/۶\times۱۰ = ۴\text{N}$$

$$\vec{f}_s = (۴\text{N})\,\hat{\text{i}}$$

Scanned by CamScanner

۸۱- SSM چرخ یکنواختی به جرم $۱۰/۰ \mathrm{kg}$ و شعاع $۰/۴۰۰ \mathrm{m}$ به میله‌ای که از مرکز آن می‌گذرد (شکل ۱۱-۶۲) محکم متصل شده است. شعاع میله برابر $۰/۲۰۰ \mathrm{m}$ و لختی چرخشی مجموعهٔ چرخ- میله نسبت به محور مرکزی آن برابر $۰/۶۰۰ \mathrm{kg \cdot m^2}$ است. چرخ ابتدا در حال سکون است و در بالای سطح شیبداری به زاویهٔ $\theta = ۳۰/۰^\circ$ با افق قرار دارد. میله روی سطح ساکن است در حالی که چرخ داخل شیاری در این سطح بدون تماس با سطح قرار دارد. وقتی چرخ رها شود، میله در طول این سطح به‌طور هموار به طرف پایین بدون لغزش می‌غلتد. وقتی ترکیب چرخ- میله به اندازهٔ $۲/۰۰ \mathrm{m}$ به طرف پایین سطح حرکت کند، مطلوب است تعیین (الف) انرژی جنبشی چرخشی و (ب) انرژی جنبشی انتقالی این دستگاه.



شکل ۱۱-۶۲ مسئلهٔ ۸۱

Scanned by CamScanner

حل: **(الف)** از پایستگی انرژی مکانیکی کل بهره می‌گیریم.

$$E_i = E_f \Rightarrow mgh = \frac{۱}{۲} I\omega^۲ + \frac{۱}{۲} mv^۲$$

$R_۱$ شعاع میله و $R_۲$ شعاع چرخ است.

$$v = R_۱ \omega$$

$$mgh = \frac{۱}{۲} I\omega^۲ + \frac{۱}{۲} mR_۱^۲\omega^۲ = \frac{۱}{۲} I\omega^۲ \left[۱ + \frac{mR_۱^۲}{I} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} I\omega^۲ = \frac{I}{I + m_۱R_۱^۲} mgh$$

$$h = d\sin\theta$$

$$K_{\text{rot}} = \frac{۰/۶}{۰/۶ + ۱۰ \times (۰/۲)^۲} \times ۱۰ \times ۹/۸ \times ۲\sin(۳۰^\circ) = ۵۸/۸\,\text{J}$$

(ب)

$$K_{tr} = -K_{\text{rot}} + mgh = -۵۸/۵ + ۱۰(۹/۸)(۲)\sin(۳۰^\circ) = ۳۹/۲\,\text{J}$$

Scanned by CamScanner

۸۳- کرهٔ توپری با وزن $۳۶/۰\,\mathrm{N}$ به طرف بالای سطح شیبداری با زاویهٔ $۳۰/۰^\circ$ می‌غلتد. در پایین سطح شیبدار مرکز جرم کـره دارای تندی انتقالی $۴/۹۰\,\mathrm{m/s}$ است. (الف) انرژی جنبشی کـره در پایین سطح شیبدار چقدر است؟ (ب) این کره تا چه مسافتی از سطح شیبدار بالا می‌رود؟ (پ) آیا پاسخ (ب) بـه جـرم کـره بستگی دارد؟

حل: (الف)

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}\frac{۲}{۵}mR^۲\omega^۲$$

$$K = \frac{۷}{۱۰}mv^۲ = \frac{۷}{۱۰}\times\frac{۳۶}{۹/۸}(۴/۹)^۲ = ۶۱/۷\,\mathrm{J}$$

(ب) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

$$h = d\sin\theta$$

$$E_i = E_f \Rightarrow K_i = mgd\sin\theta$$

$$d = \frac{K_i}{mg\sin\theta} = \frac{۶۱/۷}{۳۶(\sin(۳۰))} = ۳/۴۳\,\mathrm{m}$$

(پ) ملاحظه می‌شود، در رابطهٔ نهایی، جرم‌ها حذف می‌شـوند. پس جواب به جرم بستگی ندارد.

Scanned by CamScanner